POTENCIA Y ENERGÍA EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SENOIDAL

1.- Relaciones de potencia y energía en los elementos pasivos básicos

Utilizamos la función seno y tomamos $\varphi_u = 0$ para el condensador y $\varphi_i = 0$ para la bobina.

Resistencia

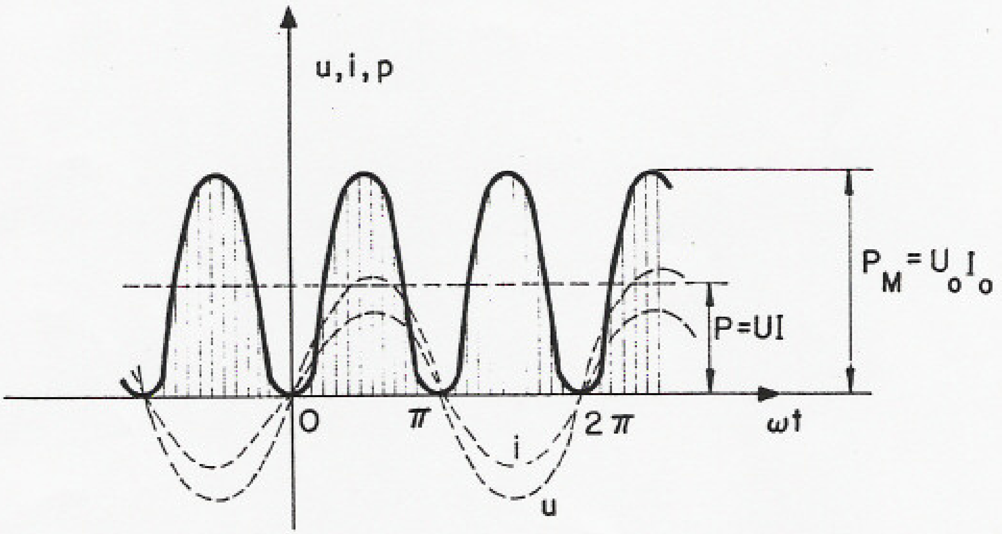
Tensión: $u(t) = \sqrt{2}\, U \operatorname{sen} \omega t$

Intensidad: $i(t) = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen} \omega t$ siendo: $I = \dfrac{U}{R}$

Potencia: $p(t) = u(t)\, i(t) = 2UI \operatorname{sen}^2 \omega t = UI\,(1 - \cos 2\omega t)$

Siempre: $p(t) \geq 0$ y oscila con frecuencia doble que la tensión entre 0 y 2UI.

El valor medio de la potencia en un periodo se designa por P y se denomina potencia activa. Una corriente continua que tenga una potencia constante e igual a P, desarrolla en un periodo la misma energía que la corriente alterna.



Para la resistencia, la potencia activa vale: $P = UI = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$

La expresión de la energía transformada en calor en la resistencia, viene representada por el área rayada comprendida entre la gráfica de *p* y el eje de abscisas.

Su expresión es: $w(t) = w(0) + \int_0^t UI(1 - \cos 2\omega t)\, dt = w(0) + \dfrac{UI}{\omega}\left(\omega t - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t\right)$

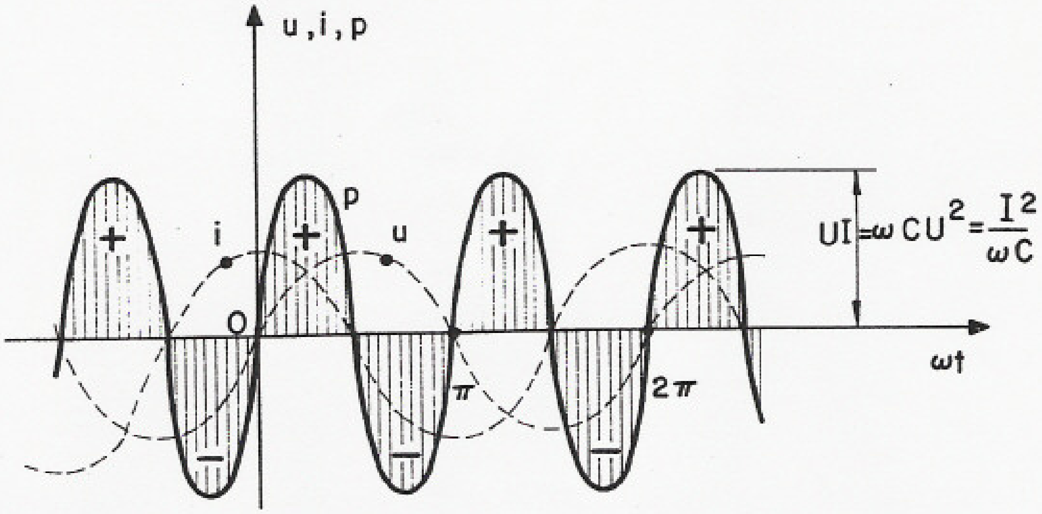
Condensador

Tensión: $u(t) = \sqrt{2}\, U \operatorname{sen} \omega t$

Intensidad: $i(t) = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2)$ siendo: $I = \dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega C}} = \omega C U$

Potencia: $p(t) = u(t)\, i(t) = 2UI \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2) = UI \operatorname{sen} 2\omega t$

Expresión que se representa gráficamente en la figura.



De la expresión de la potencia deducimos las siguientes propiedades:

- La variación de p(t) es puramente senoidal de frecuencia doble que la de u(t) o i(t).
- El valor medio de p(t), es decir, la potencia activa, es cero. → $P = 0$
- Las oscilaciones de p(t) tienen por amplitud: $UI = \omega CU^2 = \dfrac{I^2}{\omega C}$, que como veremos, coincide con el valor absoluto de lo que se denomina *potencia reactiva de capacidad.*

La energía almacenada en el campo eléctrico del condensador es:

$$w(t) = \frac{1}{2} C\, u^2 = CU^2 \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} CU^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

Expresión que varia senoidalmente, con frecuencia doble que la de *u*, entre 0 y CU^2.

En la figura se observa que, durante el primer cuarto de periodo de la excitación la tensión y la intensidad tienen igual signo, por lo que $p > 0$. Significa que la fuente de excitación realiza un trabajo positivo y carga el condensador con una energía que queda almacenada en su campo eléctrico.

Durante el segundo cuarto de periodo, la tensión disminuye en valor absoluto, el sentido de la corriente es contrario al de la tensión, por lo que se descarga el condensador, y es $p < 0$, con lo que el condensador devuelve energía a la fuente, la que actúa como un receptor.

Al final de este segundo cuarto de periodo, la energía almacenada en el campo eléctrico asociado al condensador es nula. La energía transferida al condensador durante el primer cuarto de periodo y la devuelta por él a la fuente durante el cuarto de periodo siguiente, son iguales entre si. Posteriormente, se repite de forma incesante este ciclo de intercambio energético entre el condensador y la fuente de excitación.

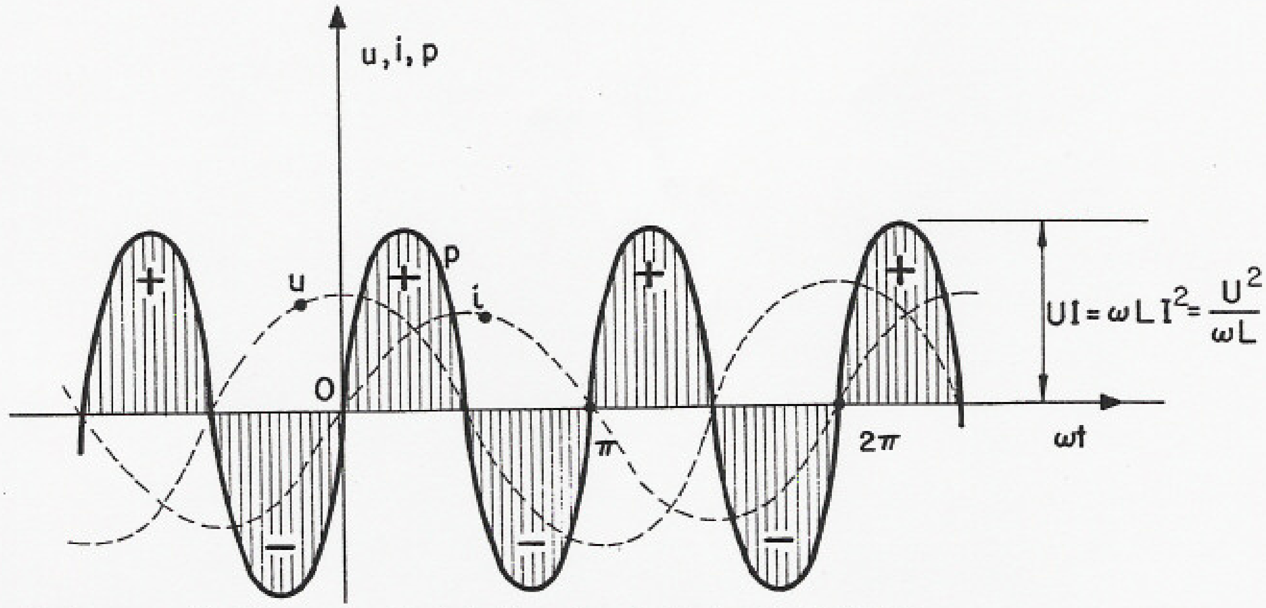
Bobina

Intensidad: $i(t) = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen} \omega t$

Tensión: $u(t) = \sqrt{2}\, U \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2)$ siendo: $U = \omega LI$

Potencia: $p(t) = u(t)\, i(t) = 2UI \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2) = UI \operatorname{sen} 2\omega t$

Expresión que se representa gráficamente en la figura.



De la expresión de la potencia deducimos las siguientes propiedades:

- La variación de p(t) es puramente senoidal de frecuencia doble que la de u(t) o i(t).

- El valor medio de p(t), es decir, la potencia activa, es cero. → $P = 0$

- Las oscilaciones de p(t) tienen por amplitud: $UI = \omega LI^2 = \dfrac{U^2}{\omega L}$, que como veremos, coincide con el valor absoluto de lo que se denomina *potencia reactiva de inductancia.*

La energía almacenada en el campo magnético de la bobina es:

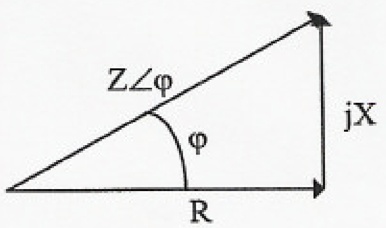
$$w(t) = \frac{1}{2} L\, i^2 = LI^2 \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} LI^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

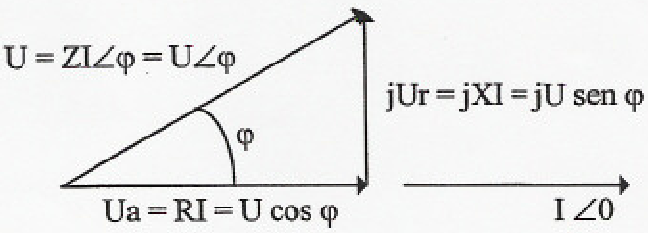
Expresión que varia senoidalmente, con frecuencia doble que la de *i*, entre 0 y LI^2.

En la figura se observa que, se efectúa, alternativamente, una transferencia de energética entre la fuente de excitación y el campo magnético asociado a la bobina. Las consideraciones hechas a este respecto al estudiar el condensador, son análogas a las que cabe hacer ahora.

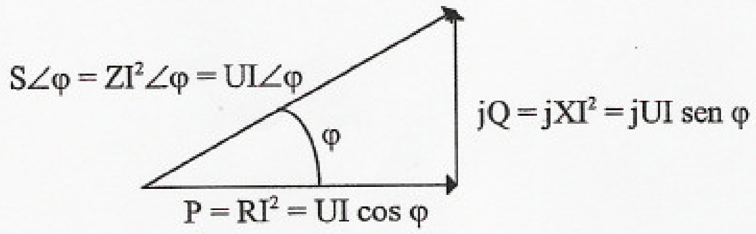
2.- Potencia aparente y reactiva

Consideremos el triángulo de impedancias. Tomando la intensidad como origen de fases, y multiplicando todos los lados del triángulo por I, obtenemos el triángulo de tensiones.





Multiplicando nuevamente este triángulo de tensiones por I, obtenemos el triángulo de potencias



El cateto horizontal $P = RI^2 = UI \cos \varphi$, representa la potencia absorbida por la componente resistiva, es decir la *potencia activa*.

El cateto vertical $Q = XI^2 = UI \text{ sen } \varphi$, representa la amplitud de las oscilaciones de la potencia en la componente reactiva de $\mathcal{Z}$, y se denomina *potencia reactiva*.

La hipotenusa $S = UI$, representa la *potencia aparente*.

Se verifican las relaciones:

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2)} \qquad \text{tg } \varphi = \frac{Q}{P} \qquad \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Las distintas potencias definidas tienen las mismas dimensiones, pero, ni la potencia aparente ni la reactiva son físicamente potencias. Se definen por que son útiles en los cálculos electrotécnicos y a que son magnitudes que se pueden medir.

La potencia aparente se mide en voltamperios (VA). La unidad de la potencia reactiva es el voltamperio reactivo (VAr), esta potencia se denomina a veces magnetizante.

3.- Potencia compleja

Se define la potencia compleja, como:

$$\mathcal{S} = P + jQ = UI (\cos \varphi + j\text{sen } \varphi) = UI\, e^{j\varphi}$$

cuyo módulo es la potencia aparente $S = UI$ y cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente, la potencia activa y la potencia reactiva.

Designando por $\mathcal{I}^*$ la conjugada de la intensidad compleja $\mathcal{I}$, podemos escribir:

$\mathcal{S} = \mathcal{U}\,\mathcal{I}^*$ este producto tiene por módulo $S = UI$ y por argumento $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Expresiones de la potencia compleja:

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}\,\mathcal{I}^* = \mathcal{Z}\,\mathcal{I}\,\mathcal{I}^* = I^2\,\mathcal{Z}$$
$$\mathcal{S} = \mathcal{U}\,\mathcal{I}^* = \mathcal{U}\,\mathcal{Y}^*\,\mathcal{U}^* = U^2\,\mathcal{Y}^*$$
$$S = Z\,I^2 = Y\,U^2$$
$$P = U\,I \cos \varphi = Ua\,I = U\,Ia = R\,I^2 = G\,U^2$$
$$Q = U\,I \text{ sen } \varphi = Ur\,I = U\,Ir = X\,I^2 = -\,B\,U^2$$

También podemos escribir:

$$P = \mathrm{Re}(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{S} + \mathcal{S}^*}{2} = \frac{\mathcal{U}\,\mathcal{I}^* + \mathcal{U}^*\,\mathcal{I}}{2}$$

$$Q = \mathrm{Im}(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}^*}{2j} = \frac{\mathcal{U}\,\mathcal{I}^* - \mathcal{U}^*\,\mathcal{I}}{2j}$$

Si trabajamos con las formas binómicas:

$$\mathcal{U} = U' + jU''$$
$$\mathcal{I} = I' + jI''$$

tendremos:

$$P = \mathrm{Re}\,[\mathcal{U}\,\mathcal{I}^*] = U'I' + U''I''$$
$$Q = \mathrm{Im}\,[\mathcal{U}\,\mathcal{I}^*] = U''I' + U'I''$$

4.- Teorema de Boucherot

Enunciado.- Para una frecuencia constante, hay conservación de la potencia activa por una parte y de la potencia reactiva por otra.

Para demostrarlo basta observar que para un circuito dado las tensiones complejas de cada rama cumplen la segunda ley de Kirchhoff para todo lazo del mismo, $\Sigma\mathcal{U} = 0$.

Además las intensidades complejas cumplen la primera ley de Kirchhoff para todo grupo de corte del circuito, $\Sigma\mathcal{I} = 0$, y también sus conjugadas $\Sigma\mathcal{I}^* = 0$.

De acuerdo con el teorema de Tellegen se cumplirá que:

$$\Sigma\mathcal{U}_k\,\mathcal{I}_k^* = 0 \quad (k = 1 \div r)$$

que se puede escribir como:

$$\Sigma(P_k + jQ_k) = 0 \qquad (k = 1 \div r)$$

y tomando parte real e imaginaria:

$$\Sigma P_k = 0,$$
$$\Sigma Q_k = 0 \qquad (k = 1 \div r)$$

Es decir, se cumple de forma independiente la conservación de la potencia activa y de la reactiva, lo que demuestra el enunciado del teorema.

5.- Factor de potencia

La relación entre la potencia activa y la aparente:

$$K = \frac{P}{S} = \cos\varphi, \text{ se denomina factor de potencia.}$$

Un receptor transforma, en la mayoría de los casos, la energía eléctrica en energía térmica o mecánica. En definitiva, lo que se consume es una potencia activa P, a una tensión constante U y de la expresión: $P = UI\cos\varphi$, se deduce que para una misma potencia P, cuanto menor sea $\cos\varphi$ tanto mayor resulta el valor de I.

Este aumento de I al disminuir cos φ, trae como consecuencia:

- Un aumento de las pérdidas por efecto Joule en la línea y en los conductores del generador:

$$(R_L + R_g)\, I^2 = (R_L + R_g)\, \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

- Una disminución de la intensidad disponible para otros usuarios ya que se encuentra limitada a un valor máximo definido por las secciones de los conductores de la línea y el generador. Por tanto, el aprovechamiento de las instalaciones generadoras y de transmisión de energía depende de los receptores.

Por estos motivos las compañías eléctricas penalizan el consumo con factores de potencia bajo, aplicando tarifas o factores de penalización a la facturación del consumo de P.

La mayoría de los receptores y las líneas son de carácter inductivo y por este motivo la limitación del cos φ a unos valores aceptables se hace mediante la conexión de baterías de condensadores que disminuye la Q total, compensando parte de la consumida por el receptor, y por tanto:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}$$, disminuye, aumentando cos φ (factor de potencia).